

การหาอนุพันธ์โดยใช้ลิมิตของอนุพันธ์

วัชรินทร์ วิชรมาลา

ปัญหานี้คงจะเป็นปัญหาที่อาจารย์หลายท่านพบ นักเรียนส่วนใหญ่จะทำผิดในรูปแบบเดียวกัน ในการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่จุด c นักเรียนหลายคนจะเผลอคิดไปว่าจะสามารถหาได้จากการหาอนุพันธ์รอบ ๆ จุด c แล้วหาลิมิต นั่นคือการที่ก๊ากไปว่า $f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} f'(x)$ ซึ่งไม่เป็นจริงโดยทั่วไป ดังจะเห็นได้จากตัวอย่างต่อไปนี้

$$\text{สำหรับ } f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} \quad \text{จะได้ว่า เมื่อ } x \neq 0 \text{ เรามี}$$

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \quad \text{ซึ่งไม่มีลิมิตเมื่อ } x \text{ เข้าใกล้ } 0$$

แต่ $f'(0)$ มีค่า ดังจะหาได้จากนิยามดังนี้

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{h} = 0$$

ตัวอย่างนี้ก็ยังไม่เป็นที่น่าพอใจ ผมได้ตามหาตัวอย่างค่านที่ลิมิตของอนุพันธ์มีค่าแต่ไม่เท่ากับอนุพันธ์ที่จุดที่สนใจ ซึ่งก็จะถือกับดักที่อันตราย

อีกเรื่องที่ผมสนใจคือเงื่อนไขใดที่จะช่วยให้ข้อที่ก๊ากดังกล่าวเป็นจริง หลังจากค้นหายุสัก็ก็ได้คำตอบจากอาจารย์อิมจิตต์ เต็มวุฒิพงษ์ ดังปรากฏในเอกสารประกอบการสอนของท่านว่าข้อที่ก๊ากดังกล่าวจะเป็นจริงถ้าสามารถหาลิมิตของอนุพันธ์ได้ ซึ่งก็เป็นการตอบคำถามของผมทั้งสองคำถาม จะเห็นว่าความจริงนี้เป็นประโยชน์มาก หากเราต้องการหาอนุพันธ์ที่จุดหนึ่ง โดยที่เราไม่รู้ว่ามีค่าหรือไม่ ทฤษฎีนี้ก็จะเสนอหนทางหนึ่งในการหา เริ่มจากหาลิมิตของอนุพันธ์ หากลิมิตมีค่าก็จะได้ว่าอนุพันธ์นั้นมีค่าและเท่ากับลิมิตที่หาได้ เราจะพิสูจน์ทฤษฎีดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์บน (a,c) และ (c,b) ถ้า $\lim_{x \rightarrow c} f'(x)$ มีค่า จะได้ว่า $f'(c)$ มีค่าและ $f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} f'(x)$

พิสูจน์ $f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{h \rightarrow c} \frac{f'(x) - 0}{1 - 0} = \lim_{h \rightarrow c} f'(x)$ โดยใช้กฎของ
โลปีตาล

ดูจากพิสูจน์ก็จะเห็นนะครับว่าข้อที่กัทกนี้มันเป็นจริงสำหรับการหาอนุพันธ์ซ้าย
และขวาด้วย ก็เป็นอันว่านักเรียนมากมายบังเอิญทำถูกโดยไม่รู้ตัวว่าเรื่องมันมี
เบื้องหลังวุ่นวายอยู่พอสมควร ผมก็ขอเสนอว่าในการออกข้อสอบเกี่ยวกับ
อนุพันธ์ ถ้าเราต้องการตรวจสอบความเข้าใจเรื่องอนุพันธ์โดยใช้นิยาม
เราก็ไม่ควรใช้โจทย์ที่บังเอิญหาลิมิตของอนุพันธ์ได้นะครับ

หมายเหตุ อาจารย์วัชรินทร์ และ อาจารย์อิมจิตต์ เป็นอาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย