ค่าสุดขีดของฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุดปลาย

วัชรินทร์ วิชิรมาลา

ในการหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน จุดที่ต้องสงสัยคือจุดวิกฤตและจุดปลายของโดเมน จากการคลุกคลีกับหัวเรื่องนี้ ผมพบว่ามีคนมากมายที่รู้สึกว่าจุดปลายจะต้องเป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์หรือต่ำสุดสัมพัทธ์ ในบทความนี้เราจะแสดงให้เห็นว่าข้อสงสัยนี้ไม่เป็นจริง และก็ยังไม่พบเงื่อนไขง่าย ๆ ที่ทำให้เป็นจริงด้วย

ตัวอย่างของฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิดที่มีจุดปลายไม่เป็นจุดสุดขีดสัมพัทธ์คือ $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x>0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ บนช่วง [0,1] จะเห็นว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง เพราะ $\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$ แต่ 0 ไม่ใช่จุดสุดขีดสัมพัทธ์ของ f เนื่องจากสำหรับ c ใด ๆ ที่ 0<c<1 จะเห็นว่าบนช่วง [0,c] ค่าของ f จะมีทั้งมากกว่าศูนย์และน้อยกว่าศูนย์ แต่ f(0)=0 ดังนั้น 0 จึงไม่ใช่จุดสุดขีดสัมพัทธ์

ถึงขั้นนี้เราก็อาจสงสัยต่อไปได้ว่าหากเราเพิ่มเงื่อนไขว่า f มีอนุพันธ์ที่จุดปลายจะบังคับให้จุดปลายนั้นเป็นจุดสุดขีดได้หรือไม่ คำตอบก็ยังคือไม่อยู่ดี ดังจะเห็นได้จากตัวอย่างต่อไปนี้ ให้ $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x>0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ บนช่วง [0,1] จะเห็นว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเพราะ $\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$ และ f มีอนุพันธ์ทางขวาที่ 0 (ซึ่งเป็นจุดปลายทางซ้าย) เนื่องจาก

$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+} x\sin\frac{1}{x}=0$ แต่ 0 ไม่ใช่จุดสุดขีดสัมพัทธ์ของ f เนื่องจากเหตุผลเดียวกับตัวอย่างที่แล้ว คือสำหรับ c ใด ๆ ที่ 0<c<1 จะเห็นว่าบนช่วง [0,c] ค่าของ f จะมีทั้งมากกว่าศูนย์และน้อยกว่าศูนย์ แต่ f(0)=0

เป็นที่น่าสนใจว่าเงื่อนไขใดที่จะทำให้จุดปลายเป็นจุดสุดขีดสัมพัทธ์ และก็เป็นที่สนใจว่ามีข้อเสนอใดอีกที่ยังไม่ได้รับการตรวจสอบ

หมายเหตุ อาจารย์วัชรินทร์เป็นอาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย