เรื่องวุ่น ๆ เกี่ยวกับอนุกรม

วัชรินทร์ วิชิรมาลา

ชื่อเรื่องไม่ใคร่จะน่าอ่านนะครับ ชีวิตเราก็ยุ่งพออยู่แล้ว ยังจะเอาเรื่องวุ่น ๆ มาใส่หัวเพิ่มอีก

ในบทความนี้เราจะมาวิเคราะห์เนื้อหาวิชาแคลคูลัสที่เกี่ยวกับการตรวจสอบการลู่เข้าของอนุกรม ผมขอเสนอข้อเท็จจริงที่กว้างกว่าอันที่เขียนไว้ในหนังสือทั่ว ๆ ไป เริ่มจากทฤษฎีบทพื้นฐานที่บอกเงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับการลู่เข้าของอนุกรม

ทบ. 1 ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า จะได้ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

ต่อมาก็ดูพฤติกรรมการลู่เข้าของอนุกรมที่เหมือนกับการลู่เข้าของลำดับในเรื่องที่พจน์แรก ๆ ไม่มีผล

ทบ. 2 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ ลู่เข้าสัก m ก็พอ

ทำให้เราปรับปรุงทฤษฎีบางข้อได้เล็กน้อยโดยต้องการเงื่อนไปจริงตั้งแต่พจน์ที่ m เป็นต้นไป สัก m ก็พอ โดยเราจะเรียกย่อ ๆ ว่า "หาง ๆ" ดังต่อไปนี้

ทบ. 3 Integral test: หากมีฟังก์ชัน f ที่หาง ๆ $0 \le a_n = f(n)$ และ f ต่อเนื่องและไม่เพิ่ม จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $\left(\int_m^n f(x)dx\right)$ ลู่เข้า

ทบ. 4 Comparison test: หากหาง ๆ $0 \le a_n \le b_n$

ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่ออก จะได้ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่ออกด้วย

ทบ. 5 Limit comparison test: หากหาง ๆ $0 \le a_n$ และ $0 < b_n$ ถ้า $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ เป็น

- จำนวนจริงบวก จะได้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่เหมือนกัน
- 0 จะได้ ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่เข้า แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้าด้วย
- ∞ จะได้ ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่ออก แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่ออกด้วย

เราเรียกอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ว่าอนุกรมสลับถ้า $a_n = (-1)^n z_n$ หรือ $a_n = (-1)^{n+1} z_n$ ที่เราใช้ z เพราะมาจากภาษากรีกโบราณ zalab

ทบ. 6 หากหาง ๆ $z_n \ge 0$ และ $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ และ $z_{n+1} \le z_n$ จะได้ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n z_n$ ลู่เข้า

ดังสุภาษิตคณิตศาสตร์โรมันที่ว่า ดูอนุกรมให้ดูหาง ดูนางให้ดูแม่

ต่อไปเราจะมาวิเคราะห์อย่างละเอียดว่าทฤษฎีบทใดบ้างที่สามารถทำให้กว้างขึ้นได้

สำหรับ ทบ. 4 เราสามารถสรุปได้ถึงขั้นว่า หากหาง ๆ $a_n \le b_n$

- ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่ออกไป ∞ จะได้ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่ออกไป ∞ ด้วย
- ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่ออกไป $-\infty$ จะได้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่ออกไป $-\infty$ ด้วย

สำหรับ ทบ. 5 เราสามารถสรุปได้ถึงขั้นว่า ถ้า $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ เป็นจำนวนจริงไม่ศูนย์ จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่เหมือนกัน โดยที่เราไม่ต้องการว่าพจน์ทั้งหลายห้ามติดลบ แต่สำหรับกรณี $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ มีตัวอย่างค้าน เช่น

$a_n = \frac{1}{n}$ และ $b_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ จะได้ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ ซึ่ง $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่เข้า แต่ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่ออก แต่กรณี $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ นั้น ผมยังหาตัวอย่างค้านไม่เจอ แต่ผมเริ่มเชื่อแล้วว่าพจน์ทั้งหลายไม่จำเป็นต้องห้ามติดลบ เราน่าจะยังได้ข้อสรุปเหมือนเดิม คำถามนี้จะเป็นสิ่งที่เราต้องค้นหาคำตอบกันต่อไป

สำหรับ ทบ. 6 จะเห็นว่าเงื่อนไข $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ มีความจำเป็น ส่วน $z_{n+1} \le z_n$ นั้นไม่จำเป็น ดังตัวอย่างต่อไปนี้

- เมื่อ $(a_n) = (1, -\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{25}, -\frac{1}{36}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{8}, ...)$ จะได้ว่าค่าสัมบูรณ์ของลำดับไม่ได้ลดตลอด แต่อนุกรมลู่เข้าสู่ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$
- เมื่อ $(a_n) = (1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{25}, ...)$ จะได้ว่าค่าสัมบูรณ์ของลำดับไม่ได้ลดตลอด และอนุกรมก็ลู่ออกสู่ ∞ จากการคิดอย่างไม่เป็นทางการว่ามันเท่ากับ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ หรืออย่างเป็นทางการว่ามันคือ $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2})$

เป็นอย่างไรบ้างครับ ไม่วุ่นอย่างที่คิดนะครับ ในโอกาสหน้าผมจะแสดงวิธีพิสูจน์ ทบ.6 และรายงานความคืบหน้าในการตอบคำถามสำหรับกรณีเฉพาะของ ทบ.5

พฤศจิกายน 2549