เรื่องวุ่น ๆ เกี่ยวกับอนุกรม ตอน 2
เรื่องวุ่น ๆ กว่า เกี่ยวกับอนุกรม

วัชรินทร์ วิชิรมาลา

หลังจากที่ได้วุ่นวายกับอนุกรมไปแล้วในตอนแรก ตอนที่สองนี้เราก็จะมาตอบคำถามจากตอนแรก พร้อมทั้งพิสูจน์บางทฤษฎีบทที่พิสูจน์ยาก

ก่อนอื่นก็ต้องท้าวความก่อนว่าเราจะพิสูจน์ทฤษฎีที่ช่วยตัดสินใจเกี่ยวกับอนุกรมสลับ

ทบ. 6 หากหาง ๆ $z_n \geq 0$ และ $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ และ $z_{n+1} \leq z_n$ จะได้ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n z_n$ ลู่เข้า

และเราก็จะพิจารณาข้อคาดการณ์ที่เพิ่มความกว้างขวางให้กับ ทบ. 5 กรณีสุดท้าย

ทบ. 5 Limit comparison test: หากหาง ๆ $0 \leq a_n$ และ $0 < b_n$ ถ้า $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ เป็น

- จำนวนจริงบวก จะได้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่เหมือนกัน
- 0 จะได้ ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่เข้า แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้าด้วย
- ∞ จะได้ ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่ออก แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่ออกด้วย

ซึ่งมีหน้าตาดังนี้

ข้อคาดการณ์ 5.3 ถ้า $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \pm\infty$ จะได้ว่า ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่ออก แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่ออกด้วย

เราจะเริ่มจากการพิสูจน์ ทบ. 6 ซึ่งส่วนใหญ่มักอ้างถึงการประยุกต์ใช้ Dirichlet’s test อันมีหน้าตาดังนี้

ทบ. Dirichlet’s test หากลำดับ $(\sum_{k=1}^{n} a_k)$ มีขอบเขตและ (b_n) เป็นลำดับไม่เพิ่มที่ลู่เข้าศูนย์ จะได้ว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ ลู่เข้า

โดยประยุกต์ใช้ดัง

พิสูจน์ (ทบ. 6)
เนื่องจาก $(\sum_{k=1}^{n} (-1)^k) = (-1,0,-1,0,\ldots)$ มีขอบเขตและ z_n เป็นลำดับไม่เพิ่มที่ลู่เข้าศูนย์ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n z_n$ จึงลู่เข้าเนื่องจาก Dirichlet’s test []

แต่เราก็เลี่ยงการใช้ Dirichlet’s test มาใช้ของกล้วย ๆ ได้เหมือนกัน

พิสูจน์ (ทบ. 6)
$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n z_n = -(z_1-z_2)-(z_3-z_4)-(z_5-z_6)-\ldots$ มีผลบวกย่อย(ที่ละคู่)เป็นลำดับลด
$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n z_n = -z_1+(z_2-z_3)+(z_4-z_5)+\ldots$ มีผลบวกย่อย(ที่ละคู่)เป็นลำดับเพิ่ม
อนุกรมจึงลู่เข้า []

สุดท้ายเราก็จะพิจารณาข้อเสนอในการขยายกรณีที่สามของทบ. 5 ผมต้องยอมรับว่าหลงคิดว่าข้อเสนอนี้เป็นจริงและพยายามพิสูจน์อยู่นาน โดยมีอาจารย์อิ่มจิตต์ช่วยให้คำแนะนำและช่วยคิด จนในที่สุดผมก็นำปัญหาในการพยายามพิสูจน์มาสร้างตัวอย่างค้าน ซึ่งชี้ให้เห็นว่าข้อเสนอนี้ไม่จริง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ให้ $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ และ $b_n = \begin{cases} \frac{-1}{n^2}, n\ odd \\ \frac{1}{n}, n\ even \end{cases}$ จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้าและ $\frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} n^{1.5}, n\ odd \\ n^{0.5}, n\ even \end{cases}$ ซึ่งลู่ออกไปอนันต์ แต่ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่ออกไปอนันต์เพราะคือ $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2n} - \frac{1}{(2n-1)^2})$

ผมก็จะจบด้วยตัวอย่างที่น่าสนใจแทนตัวอย่างที่ให้ในบทความตอนแรกที่แล้ว เพื่อแสดงว่าอนุกรมสลับ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n z_n$ ไม่จำเป็นต้องมี z_n เป็นลำดับไม่เพิ่ม ก็จะยังสามารถลู่เข้าได้ ตัวอย่างนี้คือ ½-1+1/4-1/3+1/5-1/6+...

ธันวาคม 2549